

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РК
САРАНСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ИМ. АБАЯ КУНАНБАЕВА

ЛЕКЦИОННЫЙ
МАТЕРИАЛ ПО
ПРЕДМЕТУ
«Математика для
ЭКОНОМИСТОВ»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 0518000 «Учет и аудит (по отраслям)»

Часть 3

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Чемезова А.С.

Линейная алгебра.

Основные определения.

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной матрицей**.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$
$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких-либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Самым характерным примером может служить **единичная** матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняется следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O,$$

где O – нулевая матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
Что такое \det будет рассмотрено ниже.

Определение. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A , а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC .

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = (1 \ 2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \quad 16).$$

Определители. (детерминанты).

Определение. Определителем квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$(1) \quad \det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Формула (1) позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$(2) \quad \det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$(3) \quad \det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы A число M_{1k} называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k} . Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. **Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det (A \pm B) = \det A \pm \det B.$

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \\ = -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26$.

Элементарные преобразования.

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одной строке другой строки;
- 3) перестановка строк;
- 4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
- 5) [транспонирование](#);

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы.

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы A . Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s .

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной [квадратной](#) матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его [дополнительный минор](#), умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами i_1, \dots, i_s , то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1} .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы. Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \quad i=(1,n), j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} - дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4; \quad M_{12}=3; \quad M_{21}=2; \quad M_{22}=1$$

$$x_{11}=-2; \quad x_{12}=1; \quad x_{21}=3/2; \quad x_{22}=-1/2$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3 .

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: $-10 + 6 - 40 = -44$.

Базисный минор матрицы.

Ранг матрицы.

Как было сказано [выше](#), минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких-либо выбранных s строк и s столбцов.

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n .

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными**.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается $Rg A$.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными**.

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg A = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow Rg = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удастся найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если A - квадратная матрица и $\det A = 0$, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

Составим матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для применения данного метода необходимо находить [обратную матрицу](#), что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\
a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\
a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30};
\end{aligned}
\quad
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix}$$

=E.

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

{ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$; $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$; \dots ; $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$ }

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i .

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1 / \det A; \quad x_2 = \Delta_2 / \det A; \quad x_3 = \Delta_3 / \det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным [выше](#) матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0; y = 0; z = -2$.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, [матричный метод](#) и [метод Крамера](#) применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений вида (1) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы, а матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной матрицей системы}$$

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Теорема Кронекера – Капелли.
(условие совместности системы)
(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.
 $RgA = RgA^*$.

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $RgA = RgA^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

~~$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \quad RgA = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad RgA^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

~~$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 3x_2 = 2 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_2 = 6 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad RgA = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{Rg}A^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Метод Гаусса.

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от [матричного метода](#) и [метода Крамера](#), метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2n+1} = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + a_{in+1} = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n+1} = b_n \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

- 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
 - 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения
- и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n + d_{1n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2n+1} = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + a_{in+1} = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n+1} = b_n \end{cases}, \text{ где } d_{ij} = a_{ij}/a_{11}, j = 2, 3, \dots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 7 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 \\ 7 & -1 & -1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & 7 \\ 7 & -1 & -1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & 5 \\ 0 & 15 & -22 & 31 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 = 5 \\ -x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 7 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1.$$

Полученный ответ совпадает с ответом, полученным для данной системы методом Крамера и матричным методом.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Ответ:

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

При использовании компьютерной версии “Курса высшей математики” можно запустить программу, которая решит любую систему линейных уравнений 3-го порядка методом Крамера и методом Гаусса или систему 4-го порядка методом Гаусса. Достаточно ввести только коэффициенты при переменных системы. Программа выдаст подробный отчет о ходе решения и результатах.

Для запуска программы дважды щелкните на значке:



В открывшемся окне выберите необходимый метод решения и следуйте имеющимся в программе указаниям.

Примечание: Для запуска программы необходимо чтобы на компьютере была установлена программа Maple (© Waterloo Maple Inc.) любой версии, начиная с MapleV Release 4.

Элементы векторной алгебры.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$|\overline{AB}| = |\vec{a}|$$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $c = a + b$

Произведение - $b = \alpha a$; $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$, при этом a коллинеарен b .

Вектор a сонаправлен с вектором b ($a \uparrow b$), если $\alpha > 0$.

Вектор a противоположно направлен с вектором b ($a \downarrow b$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов.

- 1) $a + b = b + a$ - коммутативность.
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 3) $a + 0 = a$
- 4) $a + (-1)a = 0$
- 5) $(\alpha \cdot \beta) a = \alpha(\beta a)$ - ассоциативность
- 6) $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$ - дистрибутивность
- 7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
- 8) $1 \cdot a = a$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами** или **координатами** вектора a в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda \alpha) \vec{e}_1 + (\lambda \beta) \vec{e}_2 + (\lambda \gamma) \vec{e}_3.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов \vec{a}_i есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М. Вектор \vec{OM} назовем радиус-вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус-вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **апplikат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $a(1; 2; 3)$, $b(-1; 0; 3)$, $c(2; 1; -1)$ и $\vec{d}(3; 2; 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы a , b и c образуют базис и найти координаты вектора \vec{d} в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{d} \\ \alpha \vec{0} + \beta \vec{0} + \gamma \vec{0} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{линейно независимы.}$$

Тогда $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2 - 3) + 12 = 4 \neq 0$$

$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) - 3(-2 - 3) + 2(4 - 6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4 - 6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора \vec{d} в базисе a, b, c : $\vec{d} \{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

При использовании компьютерной версии “Курса высшей математики” можно запустить программу, которая позволит разложить любой вектор по любому новому базису, т.е. решить предыдущий пример для любых векторов \vec{d}, a, b, c .

Для запуска программы дважды щелкните по значку:



В открывшемся окне программы введите координаты векторов и нажмите Enter.

Примечание: Для запуска программы необходимо чтобы на компьютере была установлена программа Maple (© Waterloo Maple Inc.) любой версии, начиная с MapleV Release 4.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок AB в соотношении λ/μ , то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \quad y = (y_1 + y_2)/2; \quad z = (z_1 + z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$$\vec{a}(x_A, y_A, z_A); \quad \vec{b}(x_B, y_B, z_B), \text{ тогда} \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов a и b называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \varphi$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $a \cdot a = |a|^2$;
- 2) $a \cdot b = 0$, если $a \perp b$ или $a = 0$ или $b = 0$.
- 3) $a \cdot b = b \cdot a$;
- 4) $a \cdot (b + \vec{c}) = a \cdot b + a \cdot \vec{c}$;
- 5) $(m a) \cdot b = a \cdot (m b) = m(a \cdot b)$;

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$a \cdot b = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:



$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|a| \cdot |b|};$$

Пример. Найти $(5a + 3b)(2a - b)$, если $|\vec{a}| = 2$, $|b| = 3$, $\vec{a} \perp b$.
 $10a \cdot a - 5a \cdot b + 6a \cdot b - 3b \cdot b = 10|\vec{a}|^2 - 3|b|^2 = 40 - 27 = 13$,
 т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $b \cdot b = |b|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot b = 0$.

Пример. Найти угол между векторами a и b , если $a = i + 2j + 3k$,
 $b = 6i + 4j - 2k$.

т.е. $a = (1, 2, 3)$, $b = (6, 4, -2)$

$$a \cdot b = 6 + 8 - 6 = 8;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |b| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3a - 2b) \cdot (5a - 6b)$, если $|a| = 4$, $|b| = 6$, $a \wedge b = \pi/3$.

$$15a \cdot a - 18a \cdot b - 10a \cdot b + 12b \cdot b = 15|\vec{a}|^2 - 28|a||b|\cos \frac{\pi}{3} + 12|b|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример. Найти угол между векторами a и b , если $a = 3i + 4j + 5k$,
 $b = 4i + 5j - 3k$.

т.е. $a = (3, 4, 5)$, $b = (4, 5, -3)$

$$a \cdot b = 12 + 20 - 15 = 17;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}; \quad |b| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos \varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos \frac{17}{50}.$$

Пример. При каком m векторы $a = mi + j$ и $b = 3i - 3j - 4k$ перпендикулярны.

$$a = (m, 1, 0); \quad b = (3, -3, -4)$$

$$a \cdot b = 3m - 3 = 0; \Rightarrow m = 1.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2a + 3b + 4c$ и $5a + 6b + 7c$, если $|a| = 1$, $|b| = 2$, $|c| = 3$, $\vec{a} \wedge b = \vec{a} \wedge c = b \wedge c = \frac{\pi}{3}$.

$$(2a + 3b + 4c)(5a + 6b + 7c) =$$

$$10a \cdot a + 12a \cdot b + 14a \cdot c + 15a \cdot b + 18b \cdot b + 21b \cdot c +$$

$$+ 20c \cdot a + 24b \cdot c + 28c \cdot c = 10 +$$

$$a \cdot a + 27a \cdot b + 34a \cdot c + 45b \cdot c + 18b \cdot b + 28c \cdot c = 10 +$$

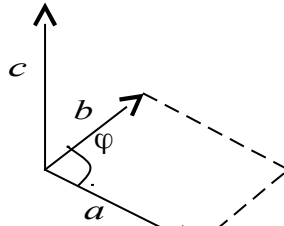
$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

Векторное произведение векторов.

Определение. Векторным произведением векторов a и b называется вектор c , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами a и b ,
 $\sin \varphi \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq \pi$
- 2) вектор c ортогонален векторам a и b
- 3) a , b и c образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $c = a \times b$ или $c = [a, b]$.



Свойства векторного произведения векторов:

- 1) $b \times a = -a \times b$;
- 2) $a \times b = 0$, если $a \parallel b$ или $a = 0$ или $b = 0$;
- 3) $(m a) \times b = a \times (m b) = m(a \times b)$;
- 4) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
- 5) Если заданы векторы $a(x_a, y_a, z_a)$ и $b(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами i, j, k , то

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b .

Пример. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 5j + k$ и $b = i + 2j - 3k$.

$a = (2, 5, 1); \quad b = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17i + 7j - k.$$

При использовании компьютерной версии “Курса высшей математики” можно запустить программу, которая может найти скалярное и векторное произведения двух векторов. Для запуска программы дважды щелкните на значке:



В открывшемся окне программы введите координаты векторов и нажмите Enter. После получения скалярного произведения нажмите Enter еще раз – будет получено векторное произведение.

Примечание: Для запуска программы необходимо чтобы на компьютере была установлена программа Maple (© Waterloo Maple Inc.) любой версии, начиная с MapleV Release 4.

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 2; 1 - 2; 0 - 2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2; 0 - 2; 3 - 2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = i(-1-4) - j(-2+4) + k(4+2) = -5i - 2j + 6k.$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример. Доказать, что векторы $a = 7i - 3j + 2k$, $b = 3i - 7j + 8k$ и $c = i - j + k$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они}$$

компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a + 3b$; $3a + b$, если $|a| = |b| = 1$; $a \wedge b = 30^\circ$.

$$(a + 3b) \times (3a + b) = 3a \times a + a \times b + 9b \times a + 3b \times b = -b \times a + 9b \times a = 8b \times a$$

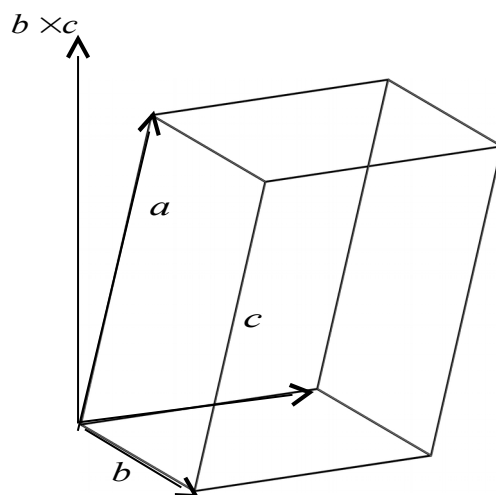
$$S = 8|b||a| \sin 30^\circ = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов a , b и c называется число, равное скалярному произведению вектора a на вектор, равный векторному произведению векторов b и c .

Обозначается $a \cdot b \cdot c$ или (a, b, c) .

Смешанное произведение $a \cdot b \cdot c$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c .



Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю;
- б) два из векторов коллинеарны;
- в) векторы компланарны.

$$2) (a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$$

$$3) (a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b)$$

$$4) (\lambda a_1 + \mu a_2, b, c) = \lambda(a_1, b, c) + \mu(a_2, b, c)$$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами a , b и c , равен

$$\frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

6) Если $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, $c = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки $A(5; 7; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

$$\vec{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\vec{AC} = (4; -3; -2)$

$$\vec{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань $B CD$, если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

$$\vec{BA} = (-2; -3; -4)$$

Найдем координаты векторов: $\vec{BD} = (1; 4; -3)$

$$\vec{BC} = (4; -1; -2)$$

$$\begin{aligned} \text{Объем пирамиды } V &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) = \\ &= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20 \text{ (ед}^3\text{)} \end{aligned}$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания $B CD$.

$$\vec{BD} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\vec{BD} \times \vec{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2 \text{ (ед}^2\text{)}$$

$$\text{Т.к. } V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} \text{ (ед)}$$

Уравнение поверхности в пространстве.

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x , y , z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.